Eine Bemerkung zu meiner Arbeit „Über die Summabilität der Fourierschen Reihe"[1]).

Von GÉZA GRÜNWALD in Budapest.

1. Es sei $F(\xi, \eta)$ eine L-integrierbare und nach 2π periodische Funktion der reellen Variablen ξ und η, und es bezeichne s_{mn} die Partialsumme vom Index mn der Fourierschen Doppelreihe dieser Funktion an der Stelle (ξ, η). Bekanntlich gibt es L-integrierbare Funktionen, deren arithmetische Mittelwerte

$$(1) \qquad \sigma_{mn} = \frac{1}{(m+1)(n+1)} \sum_{\nu=0}^{m} \sum_{\mu=0}^{n} s_{\nu\mu}$$

in sämtlichen Punkten des Quadrats $-\pi \leqq \xi \leqq \pi$, $-\pi \leqq \eta \leqq \pi$ divergieren[2]). Wir können die Konvergenz der arithmetischen Mitteln dadurch sichern, daß wir bei der Mittelbildung einige Partialsummen von s_{mn} ausschließen. So bewies MARCINKIEWICZ und ZYGMUND, daß die Folge (1) fast überall konvergiert, wenn $m/n \leqq \lambda$, $n/m \leqq \lambda$ ist, wo λ eine feste Zahl ist[3]). Noch einfacher ist diejenige Summationsmethode, welche von L. FEJÉR stammt, die von der zweifach unendlichen Folge der Partialsummen s_{mn} die einfach unendliche Folge $s_{00}, s_{11}, \ldots, s_{nn}, \ldots$ auswählt und deren Mitteln untersucht[4]). Wir haben bewiesen, daß diese Mittelwerte für L-integrierbare $F(\xi, \eta)$ fast überall konvergieren[1]). Der Beweis dieses

---

1) *Diese Acta*, **10** (1941), S. 55–63. Wir zitieren im Folgenden diese Arbeit als I.

2) S. SAKS, Remark on the differentiability of the Lebesgue indefinite integral, *Fundamenta Math.*, **22** (1934), p, 257–261.

3) J. MARCINKIEWICZ and A. ZYGMUND, On the summability of double Fourier series, *Fundamenta Math.*, **32** (1939), p. 122–132.

4) L. FEJÉR, Zur Summabilitätstheorie der Fourierschen und Laplaceschen Reihe, *Proceedings Cambridge Phil. Society*, **34** (1938), p. 503–509.

Satzes ist auf den Fall eines anderen einfachen und interessanten Summationsverfahrens übertragbar. Betrachten wir nämlich diejenigen Partialsummen, in denen die Summe der Indizes gleich n ist, also die Partialsummen

$$s_{0n},\ s_{1,n-1},\ \ldots,\ s_{n0}\,; \tag{2}$$

dann gilt für diese der auf die „Cauchysche" Partialsummen bezügliche Summabilitätssatz:

Es sei $F(\xi, \eta)$ eine L-integrierbare und nach 2π periodische Funktion der reellen Variabeln ξ und η. Bezeichnet dann $\sum\limits_{m=0}^{\infty}\sum\limits_{n=0}^{\infty} A_{mn}$ die Fouriersche Doppelreihe dieser Funktion $F(\xi, \eta)$ an der Stelle (ξ, η), so ist fast überall im Quadrat $-\pi \leqq \xi \leqq \pi$, $-\pi \leqq \eta \leqq \pi$

$$\lim_{n=\infty} \frac{s_{0n} + s_{1,n-1} + \ldots + s_{n0}}{n+1} = F(\xi, \eta), \tag{3}$$

wo

$$s_{k,n-k} = \sum_{\nu=0}^{k} \sum_{\mu=0}^{n-k} A_{\nu\mu}. \tag{4}$$

2. Für den Beweis ist es hinreichend zu zeigen, daß für den hier auftretenden Kern die Abschätzungen (16), (17), (18), (19) von I gelten; alles Weitere läßt sich wörtlich aus I übernehmen.

Es sei

$$\bar{\sigma}_n(\xi, \eta\,; F) = \frac{s_{0,n-1} + s_{1,n-2} + \ldots + s_{n-1,0}}{n}, \tag{5}$$

dann ist

$$\bar{\sigma}_n(\xi, \eta; F) =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2 n} \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(u+\xi, t+\eta) \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(k-1/2)t \sin(n-k+1/2)u}{\sin t/2 \sin u/2}\, du\, dt = \tag{6}$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(u+\xi, t+\eta)\, \bar{k}_n(u, t)\, du\, dt.$$

Wegen

$$\sum_{k=1}^{n} \sin(k-1/2)\, t \sin(n-(k-1/2))\, u =$$

$$= 1/2 \cos nu \sum_{k=1}^{n} (\cos(k-1/2)(t+u) - \cos(k-1/2)(t-u)) +$$

$$+ 1/2 \sin nu \sum_{k=1}^{n} (\sin(k-1/2)(t+u) + \sin(k-1/2)(t-u)) =$$

$$= {}^1/_2 \cos nu \left(\frac{\sin n(t+u)}{2 \sin \frac{t+u}{2}} - \frac{\sin n(t-u)}{2 \sin \frac{t-u}{2}} \right) +$$

$$+ {}^1/_2 \sin nu \left(\frac{\sin^2 n \frac{t+u}{2}}{\sin \frac{t+u}{2}} - \frac{\sin^2 n \frac{t-u}{2}}{\sin \frac{t-u}{2}} \right) =$$

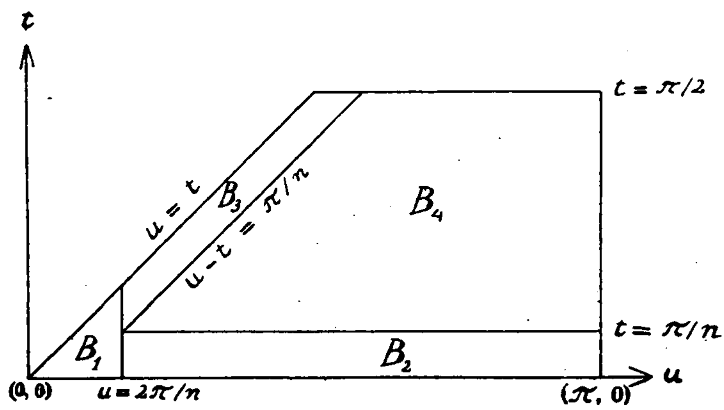
$$= {}^1/_2 \left(\frac{\sin n \frac{t+u}{2} \cos n \frac{t-u}{2}}{\sin \frac{t+u}{2}} - \frac{\sin n \frac{t-u}{2} \cos n \frac{t+u}{2}}{\sin \frac{t-u}{2}} \right)$$

erhalten wir

(7) $\bar{k}_n(u,t) =$

$$= \frac{1}{8n \sin {}^u/_2 \sin {}^t/_2} \left(\frac{\sin n \frac{t+u}{2} \cos n \frac{t-u}{2}}{\sin \frac{t+u}{2}} - \frac{\sin n \frac{t-u}{2} \cos n \frac{t+u}{2}}{\sin \frac{t-u}{2}} \right).$$

Wir werden die Funktion $\bar{k}_n(u, t)$ in den Bereichen B_1, B_2, B_3, B_4 (siehe die Figur) abschätzen.



a) In B_1 ist[5]) wegen (6)

(8) $$|\bar{k}_n(u,t)| \leqq {}^c/_n \sum_{k=1}^{n} (k - {}^1/_2)(n - k + {}^1/_2) \leqq cn^2$$

b) In B_2 ist wegen $u - t \geqq {}^\pi/_n$ und $u - t \geqq {}^u/_2$

$$\left| \frac{\sin n \frac{t+u}{2}}{\sin \frac{t+u}{2}} - \frac{\sin n \frac{t-u}{2}}{\sin \frac{t-u}{2}} \right| \leqq c \frac{nt}{u}$$

[5]) Hier und im Folgenden bezeichnen wir einfachheitshalber die verschiedenen absoluten Konstanten mit c, also ohne Indizes.

und

$$\left|\frac{\sin n\frac{t+u}{2}\cos n\frac{t-u}{2}}{\sin\frac{t+u}{2}}-\frac{\sin n\frac{t-u}{2}\cos n\frac{t+u}{2}}{\sin\frac{t-u}{2}}\right|\leqq$$

$$\leqq\left|\frac{\sin n\frac{t+u}{2}}{\sin\frac{t+u}{2}}-\frac{\sin n\frac{t-u}{2}}{\sin\frac{t-u}{2}}\right|+$$

$$+|\sin n\,t/2\sin n\,u/2|\left|\frac{\sin n\frac{t+u}{2}}{\sin\frac{t+u}{2}}+\frac{\sin n\frac{t-u}{2}}{\sin\frac{t-u}{2}}\right|\leqq$$

$$\leqq c\frac{nt}{u}+|\sin n\,u/2\sin n\,t/2|\left(c\frac{nt}{u}+2\left|\frac{\sin n\frac{t-u}{2}}{\sin\frac{t-u}{2}}\right|\right)\leqq$$

$$\leqq cn\frac{t}{u}+c\frac{|\sin n\,t/2|}{u}\leqq c\frac{nt}{u},$$

also

$$|\bar{k}_n(u,t)|\leqq c\frac{1}{nut}\,\frac{nt}{u}=c\frac{1}{u^2}. \tag{9}$$

c) In B_3 gilt

$$|\bar{k}_n(u,t)|\leqq c\frac{1}{nut}\,n=c\frac{1}{ut}. \tag{10}$$

d) Endlich ist in B_4

$$|\bar{k}_n(u,t)|\leqq c\frac{1}{nut}\left(\frac{1}{u+t}+\frac{1}{u-t}\right)\leqq c\frac{1}{nut(u-t)}. \tag{11}$$

Die Abschätzungen (8), (9), (10), (11) sind mit den Abschätzungen (16), (17), (18), (19) von I identisch, qu. e. d.

(Eingegangen am 9. März 1940)